**Djeljivost u skupu cijelih brojeva**

**- odabrani zadatci za dodatnu nastavu u osnovnoj školi**

Definicija : Za cijeli broj *a* kažemo da je djeljiv s cijelim brojem *b*,, ako postoji cijeli broj *k* tako

da vrijedi . Broj *k* zovemo količnik ( kvocijent ) brojeva *a* i *b* .

Poučci o djeljivosti u skupu **Z** :

P.1. Ako su *a* i *b* cijeli brojevi djeljivi cijelim brojem *m*, , onda je s *m* djeljiv i njihov zbroj *a* + *b* i

njihova razlika *a* – *b*.

P.2. Ako je zbroj nekoliko cijelih brojeva djeljiv s cijelim brojem *m*, , i ako su svi pribrojnici

osim jednog jedinog djeljivi s *m*, onda i taj pribrojnik mora biti djeljiv s *m*.

P.3. Ako je cijeli broj *a* djeljiv s *m*,  i cijeli broj *b* djeljiv s *n*, , onda je umnožak djeljiv

s .

P.4. Ako je cijeli broj *n* djeljiv s *m*,  i cijeli broj *a* djeljiv s *n*, , onda je s *m* djeljiv i *a* .

Iz P.3. slijede i ove tvrdnje :

1° Ako je cijeli broj *a* djeljiv s *m*, onda je i , gdje je *n* bilo koji prirodan broj.

2° Ako je u nekom umnošku bar jedan od brojeva djeljiv s *m*, onda je s *m* djeljiv i sam umnožak.

Pravila ( kriteriji ) djeljivosti

Na osnovu poučaka o djeljivosti i jedinstvenosti prikaza prirodnog broja u dekadskom sustavu u obliku :

,gdje je

izvode se pravila za djeljivost nekim prirodnim brojem.

Prirodni broj djeljiv je s 2 ako i samo ako je broj *a*0 djeljiv s 2.

Prirodni broj djeljiv je s 5 ako i samo ako je broj *a*0 djeljiv s 5.

Prirodni broj djeljiv je s 10 ako i samo ako mu je zadnja znamenka *a*0 = 0 .

Prirodni broj djeljiv je s 3 ako i samo ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 3.

Prirodni broj djeljiv je s 9 ako i samo ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 9.

Prirodni broj djeljiv je s 4 ako i samo ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4.

Prirodni broj djeljiv je s 25 ako i samo ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 25.

Prirodni broj djeljiv je s 8 ako i samo ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 8.

Prirodni broj djeljiv je s 125 ako i samo ako mu je troznamenkasti završetak

djeljiv s 125.

Za djeljivost prirodnog broja s 8 izvedimo još jedno pravilo koje je ponekad lakše primijeniti nego dijeliti troznamenkasti ostatak.

Prirodni broj djeljiv je s 8 ako i samo ako je zbroj djeljiv s 8 .

Prirodni broj djeljiv je s 7, 11 ili 13 ako i samo ako je djeljiv s 7, 11 ili 13.

Primjer 1. Zadan je sedmeroznamenkasti broj 9 835 412.

a) U zapisu tog broja treba izostaviti jednu znamenku da se dobije šesteroznamenkasti broj djeljiv s 9.

b) U dobivenom šesteroznamenkastom broju znamenku jedinice zamijenimo novom znamenkom tako da broj bude djeljiv s 15. ( Županijsko natjecanje 2008., 5.r. )

Primjer 2. Neki troznamenkasti broj 21 je put veći od zbroja svojih znamenaka. Dokažite da je taj broj djeljiv brojem 9. Odredite taj broj.

( Državno natjecanje 2014., 7.r. )

Primjer 3. Dokažite da je razlika kvadrata bilo koja dva neparna broja djeljiva s 8.

( Državno natjecanje 2009., 8.r. )

Primjer 4. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiva zbrojem tih brojeva.

( Školsko-općinsko natjecanje 2006., 1.r.-B varijanta ( opća gimnazija ))

Teoremi o dijeljenju :

T.1. Za cijeli broj *a* i prirodan broj *b* postoje jedinstveni cijeli brojevi *q* i *r* takvi da je

.

T.2. Svaki se cijeli broj *a* za neki prirodan broj *b* može prikazati u jednom od oblika :

, .

Primjer 5. Neka je *b* = 4. Onda se svaki cijeli broj *a* može napisati u obliku *a* = 4*q* , ili *a* = 4*q* +1, ili

*a* = 4*q* +2, ili *a* = 4*q* + 3. Time se skup cijelih brojeva raspada na četiri disjunktna podskupa. U svaki podskup ulaze oni cijeli brojevi koji pri dijeljenju s 4 daju isti ostatak.

*A*0={…-12,-8,-4,0,4,8,12,16,…} , *A*1={…-11,-7,-3,1,5,9,13,17,…},

*A*2={…-10,-6,-2,2,6,10,14,18,…}, *A*3={…-9,-5,-1,3,7,11,15,19,…}.

***Z*** = *A*0 *ᴗA*1ᴗ *A*2ᴗ *A*3

Primjer 6. Neka je *p* prost broj veći od 3. Dokažite da njegov kvadrat pri dijeljenju s 24 daje ostatak 1.

( Školsko-općinsko natjecanje 2007., 1.r.-A varijanta ( prirodoslovno-matematička gimnazija ))

Primjer 7. Dokažite da postoji broj kojem su sve znamenke jedinice, djeljiv s 123.

Rješenje : Ti brojevi su 1, 11, 111, 1111, …,. Ostatci dijeljenja ovih brojeva s 123 su 0, 1, 2,…122. Kako je brojeva 124, a ostataka dijeljenja 123, po Dirichletovom principu neka dva broja od početnih 124 imati će isti ostatak pri dijeljenju s 123. Neka su to brojevi: *a* = i *b* = , a odatle je *a* - *b* = 11…100…0 = 11…1·10*k* . Kako 123 dijeli razliku *a* – *b* , a nije djelitelj broja10*k*, zaključujemo da 123 dijeli . Š.T.D.

Pravilo najvećeg zajedničkog djelitelja: U postupku dijeljenja prirodnih brojeva ,

vrijedi *D*(*a*,*b*) = *D*(*b*,*r*).

Primjenom ovog svojstva možemo odrediti najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva *a* i *b* postupkom koji je poznat pod nazivom Euklidov algoritam i li verižno dijeljenje. Broj *a* , *a* > *b* ,dijelimo brojem *b* i dobijemo ostataka *r*1. Zatim broj *b* dijelimo brojem *r*1 i dobijemo ostatak *r*2 . Broj *r*1 dijelimo brojem *r*2 i dobijemo ostatak *r*3 , itd. Nakon konačnog broja dijeljenja dobivamo *b* > *r*1 > *r*2 > *r*3 >…> *rn* > *rn*+1 = 0 .

Posljednji ostatak *rn* , koji je različit od nule, najveći je zajednički djelitelj brojeva *a* i *b* .

Primjer 8. Odredimo najveći zajednički djelitelj brojeva 819 i 735.

819 = 1·735 + 84 ; 735 = 8·84 + 63 ; 84 = 1·63 + 21 ; 63 = 3·21 + 0 . Dakle *D* ( 819, 735 ) = 21.

Primjer 9. Neka su *p* i *q* različiti neparni prosti brojevi. Dokažite da je broj ( *pq* +1)4 -1 ima barem četiri različita prosta djelitelja.

Rješenje : 

Zadani broj ima proste djelitelje *p* i *q*. Treba još dokazati da su brojevi *pq* +2 i  relativno prosti. Dokažimo to koristeći pravilo najvećeg zajedničkog djelitelja:

*D*(, *pq* +2) *= D*(*pq* + 2, ) = *D*(*pq* + 2, 2 ) =

*D*( 2, *pq +* 2 – 1·2 ) = *D*( *pq* ,2 ) = 1.

Zadatci za vježbu :

**1.** Dokažite da je broj 20129 + 20169 djeljiv s 2014. (Županijsko natjecanje 2014.-1.r.-PMG)

**2.** Broj *n* je najmanji pozitivan višekratnik broja 15 kojemu su sve znamenke 0 ili 8. Odredite najveći prosti broj s kojim je broj *n* djeljiv. (Županijsko natjecanje 2014.-3.r.-OG)

**3.** Ako su *p* i *p*2+8 prosti brojevi, dokažite da je i broj *p*3+4 prost. (Županijsko natjecanje 2014.-1.r.-PMG)

**4.** Broj *n* pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2, pri dijeljenju s 4 ostatak 3, a pri dijeljenju s 5 ostatak 4. Nađite najveći troznamenkasti broj *n* s ovim svojstvima.

**5.** Nađite sve prirodne brojeve kojima je prva znamenka 6 i koje zadovoljavaju uvjet da se uklanjanjem te prve znamenke dobije broj koji je 25 puta manji od početnog.

**6.** Od pet po volji odabranih prirodnih brojeva uvijek je razlika neka 2 broja djeljiva s 4. Dokažite!

Rješenja zadataka za vježbu:

**1.** |

|

Zaključak : (*m*+*n*)|

| || . Š.T.D.

**2.** *n* = *k* ·15 = *k* ·3·5

5|*n* posljednja znamenka broja *n* je 0 ili 5. 5 ne može biti prema uvjetu zadatka, pa zaključujemo da broj *n* završava na nulu. ( 1 )

3|*n* zbroj znamenaka broja *n* djeljiv je s 3. Kako po uvjetu zadatka znamenke broja *n* mogu biti osmice ili nule, najmanji takav broj je 888 jer je 8+8+8=24 djeljivo s 3. ( 2 )

Iz (1) i (2) proizlazi da je *n* = 8880 = 24·3·5·37 pa je najveći prosti djelitelj broja *n* broj 37.

**3.** *p* = 3  *p*2 + 8 = 17 i *p*3 + 4 = 31 . Brojevi 17 i 31 prosti su brojevi.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 3·*q*+*r* | 3·0+1 | 3·0+2 | 3·1+0 | 3·1+1 | 3·1+2 | 3·2+0 | 3·2+1 | 3·2+2 | 3·3+0 | 3·3+1 | 3·3+2 | 3·4+0 |

dva slučaja s obzirom na ostatke pri dijeljenju s tri.

1.  *p*2 + 8 nije prost broj

2.  *p*2 + 8 nije prost broj

Jedina mogućnost da su *p* i *p*2 + 8 prosti brojevi je za *p* = 3, a u tom je slučaju je i *p*3 + 4 prost broj.

**4.** Prema T.1. vrijedi *n* = 3*k* + 2, *n* = 4*l* + 3 i *n* = 5*m* + 4.

Dodamo li ovim jednakostima 1, dobit ćemo *n* + 1 = 3*k* + 3 3|(*n* + 1), *n* + 1 = 4*k* +4 4|(*n* + 1) i *n* + 1 = 5*k* + 5 5|(*n* + 1). Najveći troznamenkasti broj koji je djeljiv s 3, 4 i 5 je *n* + 1 = 960, odatle slijedi *n* = 959.

**5.** Traženi broj je oblika :. Prema uvjetu zadatka vrijedi 6·10*n*  + *x* = 25*x* , a odatle *x* = 25·10*n* , pa je traženi broj *a* = 625·10*n-*2 . Svi prirodni brojevi s zadanim svojstvima su 625, 6250, 62500, 625000, ...

**6.**  Pri dijeljenju prirodnog broja s 4 mogući su ostatci 0, 1, 2 i 3. Kako imamo pet brojeva i četiri ostatka, po Dirichletovu principu, postoje dva broja među tih pet koji imaju isti ostataka pri dijeljenju s 4. Razlika tih brojeva je broj koji je djeljiv s 4.

Literatura:

* Franco Conti, Michele Brasanti, Tullio Franzoni - LE OLIMPIADI DELLLE MATEMATICA
* B. Dragović, P. Mlađenović, S. Ognjanović - Pripremni zadaci za matematička natjecanja
* MFL
* B. Dakić, N. Elezović – Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za 1. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije
* Zadatci s školskog/gradskog, županijskog i državnog natjecanja iz matematike